科學與科技－混沌與分形

1. 科學與科技系列

為配合澳門特別行政區政府施政報告方針中普及和支持科學技術知識的學習和發展，澳門郵政近年來落實發行了諸如《脫氧核糖核酸的組織及構成》、《粒子物理學的標準模型》以及《廿一世紀宇宙論》等郵品，而這些課題都是數千年來人們在一直追尋答案的難題。

本次發行《**混沌與分形**》屬科學與科技系列的第四輯。與之前同系列郵品發行的目的相同，我們希望藉著這套郵品向世界各地的廣大澳門郵品收藏者展現一個仍然處於科學前沿的重要課題。

以下的說明力求傳達與此課題相關而又比較通俗易懂的基礎知識。它並沒有使用數學的推導方式進行介紹，而是在盡可能嚴謹的情況下使用了我們的日常用語。

若這輯郵品能夠使各位產生興趣去深入瞭解更多關於**混沌理論**與**分形幾何**的知識，那麼就達到了發行這套郵票的主要目的。

2. 混沌理論與分形幾何

混沌與**分形**都對大自然的複雜性提供了新穎的見解，近數十年來它們一直引起經濟學家、生物學家和物理學家乃至普羅大眾等的關注和興趣。事實上，混沌理論和分形幾何已經在某程度上改變並修正了我們對周遭世界極為有限的認識和理解。

混沌理論主要描述敏感系統中複雜的動力學問題。這門學問主要研究在具備精確初始條件的情況下，是否能夠對任意系統進行長期而準確的預測。混沌理論可應用於預測天氣、股市乃至人們大腦狀態等複雜模式。

分形幾何是一種數學語言，它可以用來描述、建模和分析存在於大自然中複雜的模式、不規則的形狀和粗糙的邊緣等。傳統歐氏幾何的基本組成元素，如直線、圓、立方體等都是一些可見的圖形，但分形幾何的基本組成元素，則主要是一些不能用圖形來表示的算法 — 它們是一些描述如何生成分形圖案的規則。有關分形幾何的研究起始於20世紀初的**加斯東・朱利亞 (Gaston Julia)**，分形幾何在地震學、天文學和圖像壓縮等科學領域都具有不同的應用。

3. 何謂分形？

"分形" 一詞是由波蘭出生的數學家**本篤・芒德布羅 (Benoît Mandelbrot)** 所創造的。他曾這樣說道："我是在1975年創造 '分形' 這個詞的，它源自拉丁語 'fratus'，形容一塊被打碎的、具有不規則形狀的石頭"。

現今人們所指的分形如：**康托 (Cantor) 集**、**皮亞諾 (Peano) 曲線**或是**科赫 (Koch) 雪花**，早在芒德布羅使用 "分形" 一詞之前就已為人所知及研究，那時它們被視為數學中荒誕、畸形或離經背道的理論。

建立分形時，我們可從簡單的形狀開始。然後，遵循一系列法則進行疊代，逐漸地轉換其形狀。

分形是十分複雜的幾何形狀，它具有如下特點：

・**自相似**的結構 — 經過不同程度放大後的圖形與自身是相同的；

・**無限的解像度** — 具有無限的細微結構；

・**分數維**。

4. 分形的維

若要解釋**分形維**的概念，就必須先了解甚麼是維。在歐氏幾何中，一個**點**沒有長度、寬度和高度，即沒有維；一條**線段**具有長度，即有一維；一個**面積**具有長度和寬度，即有二維；而一個**體積**則同時具有長度、寬度和高度，即有三維。

為什麼一條線段只有一維，而一個面積則有兩維？

我們可以把一條線段分成2、 3、 4...或 k 條自相似的小線段。若要將每條小線段還原為原來的線段，我們需要分別按照2、 3、 4...或 k 的**放大因子**對線段進行放大。

而一個正方形則不一樣。我們可以把二維的正方形分解成4、9、16...或 k^2 個自相似的小正方形。若要將每個小正方形還原為原來的正方形，我們需要分別按照2、 3、 4...或 k 的放大因子對小正方形進行放大。一般來說，一個正方形可被分成 k^2 個自相似的複製圖形，而每個複製圖形經過 k 倍放大後就可得出原來的正方形。

同樣，我們可以把一個三維的**立方體**分解成 k^3 個自相似的小立方體，每個小立方體經過 k 倍放大後就可得出原來的立方體。

通過上述的例子我們可以發現一個用於指定自相似物體維數的方法。在一個自相似的物體中，它的**放大因子** k ($k = 1/r$，而 r 是**縮小因子**) 和自相似物體的數目 n 之間的關係，可用下面的表達式表示：

$$n = k^d = 1/r^d$$ 其中 d 是**維數**

對上述表達式取對數：

可得**分形的維** $$d = \frac{\log n}{\log k}$$

其中 n 為自相似物體的個數，k 為放大因子

5. 希爾伯特曲線

希爾伯特曲線為德國數學家**大衛・希爾伯特 (David Hilbert)** (1862 - 1943) 所發明。希爾伯特的研究成果甚豐，並以其最著名的 "公理幾何學" 而被稱為 "公理幾何學之父"。在1900年，他提出了23道非凡的數學難題，並且預言這些數學難題有可能被二十世紀的數學家所解開。

人們認為直線、平面和空間分別是一維、二維和三維的。希爾伯特曲線是一條可以填充整個平面或整個空間的一維曲線。即這條曲線可以穿過平面中或空間中的每一個點。

如要獲得一條希爾伯特曲線，可按下列的步驟進行 [參見郵票：希爾伯特曲線 S071 (6/1)]：

- 先畫出一個邊線為虛線的正方形，希爾伯特曲線便在這個正方形內產生；
- 將正方形分成四個小正方形，並將各個小正方形的中心連結起來，以形成一條由三條線段組成的、外形與倒 "U" 相似的曲線 C_0；
- 接著，以½的比例將 C_0 縮小並複製到四個小正方形內。將左下方的曲線按順時針方向旋轉90°，再將右下方的曲線按逆時針方向旋轉 90°；
- 然後，用三條線段將上述四條曲線的起點和終點連接在一起，線段的尺寸僅為前面所使用的線段的一半，此時可以獲得曲線 C_1；
- 接著，將 C_1 再縮小一半；把縮小後的 C_1 複製到四個小正方形內；
- 將位於下面兩個正方形內的曲線，分別按順時針方向和逆時針方向旋轉90°；
- 用三個尺寸縮小為原來¼的線段，把四條 C_1 曲線連接起來就獲得曲線 C_2；
- C_2 包含16個 C_0 的複製品，而每個複製品是其原來大小的 ¼。

這一操作可被重複任意次。

6. 分形樹

根據**本篤・芒德布羅**和**米歇爾・弗蘭茨 (Michael Frame)** 的研究，**二進制分形樹** [參見郵票：分形樹 S071 (6/2)] 可定義為重複執行對稱雙分枝 (symmetric binary branching) 操作所產生的圖形。其生成的步驟是：在長度為 l 的**樹幹**中分離出**兩條**長度為 rl 的**分枝**，其中 r 為**比例因子**；每條分枝與樹幹的夾角為 θ。然後重複將每條分枝作為樹幹以同樣的方法產生下一級的分枝。

換言之，最初的兩條分枝，經過分離後各自生成兩條長度為 r^2l 的分枝，新的分枝與其所屬樹幹的夾角為 θ。

將該操作重複任意次後，由各分枝及其端點所組成的集合即為分形樹，而分形樹的端點稱為**分枝端**。根據從樹根到達分枝端所經過的路徑及方向，分形樹的每條分枝都可用一個由 L 和 R 所組成的符號序列來表示，其中 L 代表選擇左面的分枝，而 R 則代表選擇右面的分枝。

分形樹由以下三個參數確定：

・樹幹長度 l；

・各分枝與其所屬樹幹的夾角 θ；

・各分枝與其所屬樹幹的長度比例 r。

7. 希爾彬斯基三角形

希爾彬斯基 (Sierpinski) 或**Gasket三角形**是由波蘭數學家**希爾彬斯基 (Waclaw Sierpinski)** (1882 - 1969) 所提出的。希爾彬斯基、**庫拉托夫斯基 (Kuratowski)** 和巴拿赫 **(Banach)** 等人同屬 "波蘭學派"，他們主要研究有關 "抽象空間" 的問題。

希爾彬斯基三角形可由平面中的一個三角形 (郵票中的紅色三角形) 開始，重複執行以下操作而生成 [參見郵票：希爾彬斯基三角形 S071 (6/3)]：

確定三角形各邊的中點，這三個中點與三角形的三個頂點組成了四個較小的三角形。刪除中間的小三角形，並對餘下的三個小三角形重複上述的操作進行疊代。

希爾彬斯基 (Gasket) 三角形是上述操作重複無數次後所獲得的一個平面點集。希爾彬斯基三角形中紅色區域的總面積為零。

由於希爾彬斯基三角形是由三個以½放大系數縮小的自身複製三角形所組成，其**分形維**等於 **log3/log2≃1.585**。

8. 混沌遊戲

混沌遊戲的名稱是由**米高・巴斯理 (Michael Barnsley)** 所創造的。若仔細考慮其生成的過程，我們將會發現混沌遊戲所得到的結果是最有趣的分形之一。

混沌遊戲的玩法如下 [參見郵票：混沌遊戲 S071 (6/4)]：

- 取一支鉛筆，一顆骰子 (骰子各面所標示的數字分別為1、1、2、2、3和3) 和一張紙；
- 在紙上畫出三個不共線的點，並標明為數字1、2 和 3，連結這三個點形成一個三角形 (也可以是長方形、等邊三角形、等腰三角形或其他圖形)，在該平面上再畫另一個不在三角形邊界上的點 Z_0，這個點稱為出發點或 "種子"；
- 投擲骰子。假設投擲的結果為數字 "2"，將此時的 "種子" 移向 Z_0 和三角形頂點 2 的中點，並將這點記為 Z_1；
- 再投擲骰子。假設投擲的結果為數字 "1"，將此時的 "種子" 移向 Z_1 和三角形頂點 1 的中點，並將這點記為 Z_2；
- 將以上過程重複任意次。

隨著投擲骰子次數的增加，希爾彬斯基三角形的圖案漸漸顯現。想一想希爾彬斯基三角形是一種有序的結構，人們會驚奇地發現：**一個隨機的操作過程可以生成極為有組織和確定性的形狀**，這與我們一般預期會生成的隨機圖案正好相反。

難道是上帝跟我們玩遊戲？還是純屬偶然的結果？

9. 科赫曲線

科赫曲線由瑞典數學家海哥・凡・科赫 **(Helge von Koch)** (1870 - 1924) 提出。如果我們連接三條以特定方式旋轉的科赫曲線，就能獲得新的圖形。由於其外表與雪花或島嶼的邊緣相似，所以被稱為 "雪花曲線" 或 "科赫島"。

科赫曲線 [參見郵票：科赫曲線 S071 (6/5)] 的生成可以由一條線段開始。首先把一條稱為**"起始元"**的線段分成三個相等的部份，將中間的線段用一個沒有底邊的等邊三角形來代替。這個圖形由四條線段所組成，並稱為**"生成元"**。生成元會在後續的步驟中重複使用。

科赫曲線是一條無限長的連續曲線，它具有自相似性和處處不可導的特點。

科赫曲線中的每一點都是轉角，即曲線上的任何一點都無法作出切線。

由於科赫曲線包含四條相當於原來曲線長度三分之一的科赫曲線，所以，其**分形維**等於 **log4/log3≃1.262**。

10. 康托集

康托集由德國數學家**格奧爾格・康托 (Georg Cantor)** (1845 -1918) 提出。他因為其研究的 "集合論" 而聞名。

基本的 "康托集" [參見郵票：康托集 S071 (6/6)] 是一個位於閉區間 [0，1] 中的無限點集，它透過連續不斷地移除三等份數軸的中心部份，最後剩下的點所組成。

康托集為**不可數集**，而且其元素具有**自相似性**，如果每一元素是透過放大系數 3 而放大的話，則該元素與集中的另外兩個元素相等。康托集的**分形維**等於 **log2/log3≃0.631**。

11. 朱利亞集與芒德布羅集

加斯東・朱利亞 (Gaston Julia) (1893-1978) 是法國數學家，因1918年發表名為 "*Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*" 的文章而聞名天下。他被公認為現代動力系統理論的創始人之一。他的研究工作一度被世人所遺忘，直至芒德布羅於1970年代將其重見天日。

本篤・芒德布羅 (Benoît Mandelbrot) (1924 -)，波蘭裔法國數學家則被公認為分形幾何學的創始人。沒有他，人們可能對分形這個領域並沒有如此大的興趣。他展現了分形不但在存在於數學，而且亦存在於自然界中的道理。當時，還在國際商業機器公司 (IBM) 工作的芒德布羅已經能夠借助電腦圖形學的方法演示了朱利亞的研究成果是最漂亮的分形圖案之一。

芒德布羅集 [參見小型張：芒德布羅集B064 (1/1)]是一個由複數點集 C 所組成的分形，其元素是複數平面中，滿足序列：$Z_0=0$；$Z_{n+1}=Z_n^2+C$ 的模不趨向於無窮大的複數 C 的集合。

芒德布羅集由皮耶爾・法圖 (Pierre Fatou) 於1905年首次定義。他證明當一個點，從其起點開始進行疊代後，只要疊代結果與原點的距離超過 2 時，疊代序列的模 (又稱為軌道) 就會趨向於無窮大。

朱利亞集 [參見小型張：朱利亞集B064 (1/1)] 是一個由複數點集 $Z_0=Z$ 所組成的分形，其元素是複數平面中，對於給定的常複數 C，滿足序列：$Z_0=Z$；$Z_{n+1}=Z_n^2+C$ 的模不趨向於無窮大的複數 Z_0 的集合。若 $Z_0=Z$ 和 C 取不同的值，可以得到很多不同的軌道模式。

朱利亞集與芒德布羅集密切相關，而芒德布羅集是所有朱利亞集的索引集。對於複平面中的任意點都能找到其對應的朱利亞集。當一個點屬於芒德布羅集時，其對應的朱利亞集是連通的，否則，其對應的朱利亞集則是由非連通點所組成的康托集。

作者：羅庇士

翻譯：澳門郵政 - 通訊博物館