Ciência e Technologia - Caos e Fractais

1 – A SÉRIE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

No sentido de promover e apoiar o desenvolvimento do conhecimento científico e tecnológico da R.A.E. de Macau – objectivos que estão consignados nas Linhas de Acção do Governo – os Correios de Macau têm vindo a publicar nos últimos anos emissões filatélicas tais como: A Composição e Estrutura do DNA, O Modelo Padrão da Física de Partículas e A Cosmologia XXI, que não só obedecem ao tema em epígrafe, como ainda se podem considerar subjacentes a um conjunto fundamental de interrogações, cuja falta de resposta tem atormentado o pensamento humano desde há milhares de anos.

Nesta 4ª Série, designada por **Caos e Fractais**, uma vez mais se procura levar aos muitos coleccionadores da Filatelia de Macau, em todo o Mundo, um tema de grande actualidade, modernidade e nas fronteiras da ciência.

O texto que se segue não recorre ao formalismo que caracteriza a Matemática, outrossim, procura, através de uma linguagem comum, simples e rigorosa quanto possível, transmitir alguns dos aspectos básicos e mais populares do tema.

Se após a sua leitura, ficar um pouco mais curioso e desejar aprofundar o seu conhecimento sobre a **Teoria do Caos** e a **Geometria Fractal**, pode-se dizer ter esta emissão atingido um dos seus objectivos.

2 – A TEORIA DO CAOS E A GEOMETRIA FRACTAL

Desde as últimas décadas que o **Caos** e os **Fractais** capturam a atenção e o interesse de economistas, biólogos, físicos, etc., bem como do público em geral, devido à forma como ambas foram capazes de criar uma nova compreensão da complexidade da natureza.

Na verdade, a Teoria do Caos e a Geometria Fractal conseguiram alterar e corrigir uma visão bastante limitada e o conceito do mundo que nos rodeia.

A Teoria do Caos descreve o movimento complexo e a dinâmica de sistemas sensíveis. O Caos estuda a questão da possibilidade, ou não, de se efectuarem previsões precisas, a longo prazo, relativamente a qualquer sistema, caso as condições iniciais sejam conhecidas com suficiente precisão. A Teoria do Caos tem uma variedade de aplicações, designadamente, na previsão meteorológica, dos mercados de acções, dos estados da mente, etc.

A Geometria Fractal é uma espécie de "linguagem" que se utiliza para descrever, modelar e analisar formas complexas, não-uniformes e rugosas, que se encontram na Natureza. Enquanto os elementos da Geometria Euclidiana tradicional são visíveis, como as linhas, os círculos, os cubos, etc., os da Geometria Fractal são invisíveis, como os algoritmos – um conjunto que permite a sua criação. Os primeiros estudos relativos à Geometria Fractal foram os trabalhos de **Gaston Julia**, no início do Século XX. Algumas das suas aplicações caem nos campos da Sismologia, Cosmologia, Compressão de Imagem, etc.

3 – O QUE É UM FRACTAL?

O termo Fractal foi criado por **Benoît Mandelbrot**, matemático natural da Polónia, que disse: "Cunhei a palavra Fractal, em 1975, do Latim *fractus* que descreve uma pedra quebrada – fragmentada e irregular".

As estruturas hoje designadas por Fractais, como o **Conjunto de Cantor**, a **Curva de Peano** ou o **Floco de Neve de Koch**, não só eram conhecidas e exploradas antes de Mandelbrot assim as designar, como eram também consideradas, naquele tempo, monstros matemáticos, aberrações ou objectos patológicos.

Para criar um Fractal, partimos de uma forma simples e transformamo-la, sucessivamente, de acordo com um conjunto de regras, num processo iterativo ou recursivo.

Os Fractais são formas geométricas bastante complexas que apresentam:

- **Auto-similaridade** na sua estrutura – parecem iguais em diferentes graus de magnificação;
- **Resolução Indefinida** – os detalhes são infinitos; e
- **Dimensão Fraccionada**.

4 – A DIMENSÃO FRACTAL

Para explicar o conceito de **Dimensão Fractal** é necessário compreender o que significa a Dimensão. Na Geometria Euclidiana: um **ponto** não tem dimensão (ões) – não tem comprimento, nem largura, nem altura; um **segmento de linha**, tem uma dimensão – comprimento; uma **área**, tem duas dimensões – comprimento e largura; um **volume**, tem três dimensões – comprimento, largura e altura.

Porque é que um segmento de linha é unidimensional e uma área bidimensional?

Podemos partir um **segmento de linha**, que é unidimensional, em 2, 3, 4... ou *k* fragmentos **Auto-similares**. Considerando um deles, para obter o segmento original, devemos ampliá-lo com um **Factor de Magnificação**, respectivamente, de 2, 3, 4... ou *k*.

O quadrado já não é assim. Podemos decompor um **quadrado**, que é bidimensional, em 4, 9, 16... ou k^2 quadradinhos Auto-similares. Considerando um deles, para obter o quadrado original, devemos ampliá-lo com um Factor de Magnificação, respectivamente, de 2, 3, 4... ou *k*. Como regra geral, um quadrado pode ser decomposto em k^2 quadradinhos Auto-similares – cópias reduzidas dele próprio –, cada um dos quais deve ser ampliado com um Factor de Magnificação *k*, por forma a se obter o quadrado original.

Como regra geral, para o **cubo**, que é tridimensional, e usando o mesmo raciocínio, podemos decompô-lo em k^3 cubinhos Auto-similares – cópias similares dele próprio –, cada um dos quais deve ser ampliado com um Factor de Magnificação k, por forma a se obter o cubo original.

Dos exemplos acima apresentados podemos encontrar uma forma para especificar a **Dimensão** de um **objecto Auto-similar**. Isto é, considerando uma estrutura Auto-similar, existe uma relação entre o **Factor de Magnificação** ***k*** ($k = 1/r$, onde *r* é o **Factor de Redução**) e o número de peças Auto-similares *n* dada pela lei da potência:

$n = k^d = 1/r^d$ onde *d* é a **Dimensão**

Aplicando logaritmos:

Dimensão Fractal $$d = \frac{\log n}{\log k}$$

n = número de peças Auto-similares
k = Factor de Magnificação

5 – A CURVA DE HILBERT

A **Curva de Hilbert** foi apresentada pelo matemático alemão **David Hilbert** (1862-1943). De entre os vários feitos que realizou, Hilbert é considerado como o pai da Geometria Axiomatizada e foi o proponente, em 1900, de 23 problemas matemáticos extraordinários, cuja solução propôs que a comunidade matemática encontrasse, no decorrer do Século XX.

A linha, o plano e o espaço são entendidos como tendo, respectivamente, uma, duas e três dimensões. A Curva de Hilbert é uma curva com uma dimensão que preenche um plano ou um espaço, isto é, que passa por cada ponto que faça parte de um dado plano ou espaço.

Para construir a Curva de Hilbert: [Veja o Selo: Curva de Hilbert, S071 (6/1)]

- Considere o quadrado ponteado que vai preencher com a curva;
- Divida-o em quatro quadrados mais pequenos e ligue os seus centros com três segmentos de recta para formar a Curva C_0, com a forma invertida de um "U";
- Seguidamente, crie quatro cópias reduzidas pelo factor ½ e coloque-as nos quatro quadrados pequenos, após ter rodado o quadrado inferior esquerdo 90° no sentido dos ponteiros do relógio e o quadrado inferior direito 90° no sentido inverso ao dos ponteiros do relógio;
- Depois, ligue os pontos inicial e final das quatro curvas com três segmentos com metade do tamanho anteriormente utilizado, para obter a Curva C_1;
- Em seguida, reduza C_1 a metade (½) e coloque novamente quatro cópias suas nos quatro quadrados pequenos;
- Como acima, rode da mesma forma os quadrados inferiores 90° no sentido dos ponteiros do relógio (o da esquerda) e 90° no sentido inverso (o da direita);
- Ligue as quatro curvas C_1 com três segmentos de ¼ do tamanho inicialmente utilizado, para obter a Curva C_2;
- C_2 contém 16 cópias de C_0, cada com ¼ do seu tamanho.

O processo pode ser repetido tantas vezes quantas quiser.

6 – A ÁRVORE FRACTAL

De acordo com **Benoît Mandelbrot** e **Michael Frame** a construção de uma **Árvore Fractal Binária** [Veja o Selo: Árvore Fractal, S071 (6/2)] é definida recursivamente através de uma ramificação binária simétrica, como se segue: "O **tronco** de comprimento ***l*** é ramificado em **dois ramos** de comprimento ***rl***, onde ***r*** é o **Factor de Redução**, descrevendo cada um ângulo ***θ*** com a direcção do tronco. Cada ramo seguinte é ramificado sucessivamente usando a mesma regra".

Por outras palavras, cada um dos dois ramos iniciais é ramificado em dois ramos de comprimento r^2l, cada um descrevendo um ângulo ***θ*** com a direcção do seu ramo parente. Continuando este processo tantas vezes quantas quiser, a Árvore é o conjunto dos ramos e seus pontos terminais designados **por pontas dos ramos**.

Cada ramo é definido por uma sequência de símbolos ***L*** (Esquerda) e ***R*** (Direita) de acordo com a direcção tomada ao longo da Árvore para alcançar a correspondente ponta do ramo.

Uma Árvore Fractal é definida por três parâmetros:

- O comprimento ***l*** (do tronco);
- O ângulo ***θ*** (entre o tronco e o primeiro ramo);
- A razão ***r*** (dos sucessivos comprimentos dos ramos).

7 – O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

O **Triângulo** ou a **"Calafeta" de Sierpinski** foi apresentado pelo matemático polaco **Warclaw Sierpinski** (1882-1969). Sierpinski, Kuratowski, Banach e outros, pertenciam à chamada "Escola Polaca" e trabalhavam juntos no emergente campo dos "Espaços Abstractos".

O Triângulo de Sierpinski pode construir-se a partir de um triângulo vermelho situado num plano, ao qual se aplica o seguinte processo repetitivo: [Veja o Selo: Triângulo de Sierpinski, S071 (6/3)]

Considere os três pontos intermédios dos lados do triângulo. Estes pontos conjuntamente com os vértices do triângulo inicial definem quatro triângulos mais pequenos, dos quais se remove o triângulo central. Aplique o mesmo procedimento aos três triângulos remanescentes e repita tantas vezes quantas queira.

O Triângulo ("Calafeta") de Sierpinski é o conjunto de pontos do plano que se obtém quando o procedimento acima referido é repetido *ad infinitum*. A área vermelha de um Triângulo de Sierpinski é zero.

Porque o Triângulo de Sierpinski é constituído por três cópias de si próprio reduzidas por um factor de ½ da sua **Dimensão Fractal** é **log3/log2≈1,585**.

8 – O JOGO DO CAOS

A designação de **Jogo do Caos** foi estabelecida por **Michael Barnsley** e o seu resultado é um dos mais interessantes Fractais, tendo em consideração o processo pelo qual é gerado.

O Jogo do Caos é jogado como em seguida se indica: [Veja o Selo: Jogo do Caos, S071 (6/4)]

- Obtenha um lápis, um dado (com as faces numeradas 1, 1, 2, 2, 3 e 3) e uma folha de papel;
- Na folha de papel marque três pontos designados pelos números 1, 2 e 3, os quais constituem os vértices de um triângulo (que pode ser rectângulo, equilátero, isósceles ou qualquer outro), e um outro ponto Z_0, arbitrariamente escolhido, dentro ou fora do triângulo, designado por ponto de partida ou "semente";
- Lance o dado; assuma que o resultado é dois; mova a "semente" para o ponto intermédio, entre Z_0 e o vértice 2, designe-o por Z_1;
- Lance o dado novamente; assuma que o resultado é 1; mova a "semente" para o ponto intermédio, entre Z_1 e o vértice 1; designe-o por Z_2;
- Repita o procedimento anterior tantas vezes quantas desejar.

Uma forma similar ao Triângulo de Sierpinski emerge gradualmente, o que é surpreendente, visto que o Triângulo de Sierpinski é uma estrutura que representa ordem e previsibilidade. Surpreendentemente, podemos observar que **um processo aleatório pode criar uma forma que é extremamente organizada e determinista** – precisamente o oposto de uma forma aleatória, o que, eventualmente, seria o esperado.

É Deus a jogar ou é pura coincidência?

9 – A CURVA DE KOCH

A **Curva de Koch** foi apresentada pelo matemático sueco **Helge von Koch** (1870-1924). Se juntarmos, com rotações apropriadas, três Curvas de Koch, obtemos uma nova figura, a qual, devido às semelhanças que apresenta, se designa por Curva de Floco de Neve ou Ilha de Koch.

A Curva de Koch [Veja o Selo: Curva de Von Koch, S071 (6/5)] é construída a partir da divisão de um segmento de recta – o **Iniciador** – em três segmentos iguais, substituindo-se o terço central por um triângulo equilátero sem base. Esta figura composta agora por quatro segmentos designa-se por **Gerador** e vai ser reutilizada nos passos seguintes.

Repita o processo para cada um dos quatro segmentos existentes, dividindo cada um deles em três partes iguais, etc. O resultado obtido é uma curva contínua, de comprimento infinito, Auto-similar e indiferenciável em qualquer ponto.

A Curva de Kock é uma curva constituída por cantos em toda a sua extensão, isto é, não é possível traçar uma tangente em qualquer dos seus pontos.

Porque a Curva de Koch é formada por quatro Curvas de Koch, com o tamanho de um terço da inicial, a sua **Dimensão Fractal** é igual a **log4/log3≈1,262**.

10 – O CONJUNTO DE CANTOR

O **Conjunto de Cantor** foi apresentado pelo matemático alemão **Georg Cantor** (1845-1918), o qual se tornou célebre pelo trabalho desenvolvido no campo hoje designado por Teoria de Conjuntos.

O Conjunto de Cantor básico [Veja o Selo: Conjunto de Cantor, S071 (6/6)] é um conjunto infinito de pontos no intervalo unitário [0,1] que se obtém pela remoção sucessiva dos terços centrais dos segmentos de linha sucessivamente obtidos.

O Conjunto de Cantor **não é contável** e é **Auto-Similar**. Porque é igual a duas cópias de si próprio, se cada cópia for magnificada por um factor de 3, a sua Dimensão Fractal é igual a **log2/log3≈0,631**.

11 – OS CONJUNTOS DE JULIA E DE MANDELBROT

Gaston Julia (1893-1978) foi um matemático francês que se tornou famoso em 1918 com a publicação da sua obra-prima "Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles". Julia é considerado um dos fundadores da moderna Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

O seu trabalho ficou esquecido até que, na década de mil novecentos e setenta, Mandelbrot o trouxe novamente à luz.

Benoît Mandelbrot, matemático franco-americano de origem polaca, (1924 -) é tido como o criador da Geometria Fractal e é grandemente responsável pelo interesse que esta área hoje atrai. Também mostrou como os Fractais podem ocorrer quer na Matemática quer na Natureza.

Mandelbrot, que já na altura trabalhava na IBM, foi capaz de demonstrar, com a ajuda de gráficos gerados em computador, que a obra de Julia era fonte de alguns dos mais belos Fractais.

O **Conjunto de Mandelbrot** [Veja o Bloco: Conjunto de Mandelbrot, B064 (1/1)] é um Fractal definido como um conjunto de pontos *C*, no plano complexo, para o qual a seguinte sequência interactiva: $Z_0=0$; $Z_{n+1}=Z_n^2+C$, não tende para o infinito.

O Conjunto de Mandelbrot foi definido pela primeira vez em 1905, por Pierre Fatou, o qual provou que quando um ponto se move para uma distância superior a **2**, a partir da origem, a sua órbita – a sequência dos valores da iteração – tende a escapar-se para o infinito.

O **Conjunto de Julia** [Veja o Bloco: Conjunto de Julia, B064 (1/1)] é um Fractal definido como um conjunto de pontos $Z_0=Z$, no plano complexo, para o qual a seguinte sequência iterativa: $Z_0=Z$; $Z_{n+1}=Z_n^2+C$, não tende para o infinito. Dependendo da escolha de $Z_0=Z$ e de *C*, é possível obter uma variada gama de padrões de órbitas.

O Conjunto de Julia está intimamente ligado ao Conjunto de Mandelbrot. O Conjunto de Mandelbrot é o index dos Conjuntos de Julia. Para cada ponto do plano complexo um correspondente Conjunto de Julia pode ser obtido. Quando um ponto se situa no Conjunto de Mandelbrot, o Conjunto de Julia é ligado, caso contrário, o Conjunto de Julia é o Conjunto Pó de Cantor de pontos desligados.

Autor: Carlos A. Roldão Lopes